Konjunktive Normalform

- Ein Literal a ist eine Variable x oder negierte Variable $\neg x$. Abkürzung: $\bar{x}$ statt $\neg x$.
- Eine Klausel ist eine Disjunktion $C = a_1 \vee \ldots \vee a_k$ von Literalen.
- Eine Formel in KNF ist eine Konjunktion $F = C_1 \wedge \ldots C_m$ von Klauseln.
- Eine Formel in KNF ist in k-KNF, wenn jede Klausel höchstens k Literale enthät.

KNF-SAT ist das Problem SAT für Formeln in KNF

k-SAT ist das Problem SAT für Formeln in k-KNF

NP-Vollständigkeit

Für eine Formel F konstruiere Formel $E(F)$ mit:

- $E(F)$ ist in 3-KNF
- $|E(F)| \leq O(|F|)$
- $E(F)$ ist erfüllbar gdw. F erfüllbar ist.

E ist polynomielle Reduktion von SAT auf 3-SAT:

Theorem

SAT $\leq_P$ 3-SAT

Also sind KNF-SAT und k-SAT für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Dagegen ist 2-SAT in P.

Konstruktion der Formel $E(F)$

Für jede Teilformel G von F neue Variable y_G, und definierende Formeln D_G:

- $G = a$ Literal:

$$\begin{aligned} D_a &= (y_a \leftrightarrow a) = (y_a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow y_a) \\ &= (\bar{y}_a \vee a) \wedge (\bar{a} \vee y_a) \end{aligned}$$

- $G = \neg H$ Negation:

$$\begin{aligned} D_{\neg H} &= (y_{\neg H} \leftrightarrow \bar{y}_H) = (y_{\neg H} \rightarrow \bar{y}_H) \wedge (\bar{y}_H \rightarrow y_{\neg H}) \\ &= (\bar{y}_{\neg H} \vee \bar{y}_H) \wedge (y_H \vee y_{\neg H}) \end{aligned}$$

Konstruktion der Formel $E(F)$

- $G = H_1 \vee H_2$ Disjunktion:

$$\begin{aligned} D_G &= (y_G \leftrightarrow (y_{H_1} \vee y_{H_2})) \\ &= (\bar{y}_G \vee y_{H_1} \vee y_{H_2}) \wedge (\bar{y}_{H_1} \vee y_G) \wedge (\bar{y}_{H_2} \vee y_G) \end{aligned}$$

- $G = H_1 \wedge H_2$ Konjunktion:

$$\begin{aligned} D_G &= (y_G \leftrightarrow (y_{H_1} \wedge y_{H_2})) \\ &= (\bar{y}_G \vee y_{H_1}) \wedge (\bar{y}_G \vee y_{H_2}) \wedge (\bar{y}_{H_1} \vee \bar{y}_{H_2} \vee y_G) \end{aligned}$$

$$E(F) = y_F \wedge \bigwedge_{G \text{ Teilformel von } F} D_G$$

NP-vollständige Graphenprobleme

Theorem

Independent Set *ist NP-vollständig.*

Beweis: Durch Reduktion von 3-SAT.

Korollar

Vertex Cover ist NP-vollständig.

Beweis: Independent Set $\leq_P$ Vertex Cover

Reduktion von 3-SAT auf Independent Set

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, und $C_i = a_{i,1} \vee a_{i,2} \vee a_{i,3}$

Konstruiere Graphen $G(F)$ mit:
$G(F)$ hat unabh. Menge I mit $|I| \geq m$ gdw. F erfüllbar ist.

- Knoten: $v_{i,j}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ und $j = 1, 2, 3$
- Dreieck $v_{i,1}$, $v_{i,2}$, $v_{i,3}$ für jedes i
- Kanten $\{v_{i,j}, v_{i',j'}\}$ wenn $a_{i,j} = \neg a_{i',j'}$

Es gilt:

- I mit $|I| = m$ $\rightsquigarrow$ α_I so dass $\alpha_I \models F$
- α mit $\alpha \models F$ $\rightsquigarrow$ $I(\alpha)$ mit $|I(\alpha)| = m$

Das Problem Subset Sum

Problem Subset Sum

Instanz:	Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = t$?

Theorem

Subset Sum *ist NP-vollständig.*

Das Problem ist offensichtich in NP.

Wir zeigen: 3-SAT $\leq_P$ Subset Sum.

Reduktion von 3-SAT auf Subset Sum

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine Formel in 3-KNF,
in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

Für $1 \leq i \leq n$:

$$a_i := 10^{m-1+i} + \sum x_i \in C_j 10^{j-1}$$
$$b_i := 10^{m-1+i} + \sum \bar{x}_i \in C_j 10^{j-1}$$

Für $1 \leq j \leq m$:

$$c_j = d_j = 10^{j-1}$$

$$t := \sum_{i=1}^{n} 10^{m-1+i} + \sum_{j=1}^{m} 3 \cdot 10^{j-1}$$

Es gilt: Es gibt eine Teilmenge der Zahlen $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, $c_1, d_1, \ldots, c_m, d_m$ mit Summe t gdw. F erfüllbar ist.