Reduktion

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

Eine Reduktion von A auf B ist eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit der Eigenschaft:

$$w \in A \;\Leftrightarrow\; f(w) \in B \qquad \text{für alle } w \in \Sigma^*$$

Notation: $A \leq B$ falls es eine Reduktion von A auf B gibt.

Eigenschaft:

- Ist B entscheidbar und $A \leq B$, dann ist auch A entscheidbar.
- Ist B semi-entscheidbar und $A \leq B$, dann ist auch A semi-entscheidbar.

Das Leerheitsproblem

Das Leerheitsproblem ist die Sprache

$$E := \{\, e \,;\; M_e \text{ akzeptiert die leere Sprache } \emptyset \,\}$$

Theorem

Das Leerheitsproblem E ist unentscheidbar.

Beweis: Reduktion von H auf $\bar{E}$:

$f(e, w)$ ist der Code der folgenden DTM:

lösche die Eingabe und schreibe (e, w) auf das Band
lasse U laufen, d.h., simuliere M_e mit Eingabe w.

Nun gilt:

Ist $(e, w) \in H$, dann hält $M_{f(e,w)}$ immer, also ist $f(e, w) \notin E$.
Ist $(e, w) \notin H$, dann hält $M_{f(e,w)}$ nie, also ist $f(e, w) \in E$.

Semi-Entscheidbarkeit und Komplement

Theorem

Sind A und $\bar{A}$ beide semi-entscheidbar, dann ist A entscheidbar.

Seien M und $\bar{M}$ DTM, die A und $\bar{A}$ akzeptieren.

Idee: Lasse M und $\bar{M}$ parallel laufen!

Bei jedem Input w muss eine von beiden halten:

$$\begin{array}{lcl} M \text{ hält bei } w & \leadsto & w \in A \\ \bar{M} \text{ hält bei } w & \leadsto & w \notin A. \end{array}$$

Realisierung durch präemptives Multitasking:

Solange M und $\bar{M}$ nicht gehalten haben
simuliere 10 Schritte von M
simuliere 10 Schritte von $\bar{M}$

Nochmal das Leerheitsproblem

Theorem

Das Komplement des Leerheitsproblems $\bar{E}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis: mittels *dovetailing* (Tafel)

Korollar

Das Leerheitsproblem E ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Da $\bar{E}$ semi-entscheidbar ist, wäre E sonst entscheidbar.

Der Satz von Rice

Bezeichne $\mathcal{S}$ die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen.

Satz von Rice

Ist $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ eine nicht-triviale Eigenschaft von semi-entscheidbaren Sprachen, also

$$\mathcal{P} \subsetneq \emptyset \quad \text{und} \quad \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{S}$$

Dann ist die Menge

$$E(\mathcal{P}) := \{\, e\,;\, M_e \text{ akzeptiert eine Sprache in } \mathcal{P} \,\}$$

unentscheidbar.

Satz von Rice: Beweis

Theorie für MI
Registermaschinen
Turing-Maschinen
Unentscheidbarkeit
Reduktion

Sei $L \in \mathcal{P}$, und M_L eine DTM, die L akzeptiert.

ObdA ist $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

Zeige: $H \leq E(\mathcal{P})$.

$f(e, w)$ ist der Code der folgenden DTM:

ignoriere die Eingabe v und simuliere M_e mit Eingabe w.

wenn die Simulation hält, simuliere M_L mit Eingabe v.

Nun gilt:

Ist $(e, w) \in H$, dann akzeptiert $M_{f(e,w)}$ die Sprache L, somit $f(e, w) \in E(\mathcal{P})$

Ist $(e, w) \notin H$, dann akzeptiert $M_{f(e,w)}$ die leere Sprache $\emptyset$, somit $f(e, w) \notin E(\mathcal{P})$.