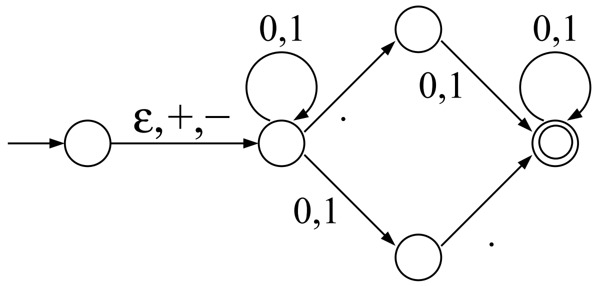
Automaten mit ϵ-Übergängen

Motivierendes Beispiel:



Ein endlicher Automat mit ϵ-Übergängen (ϵ-NEA) ist definiert wie ein NEA, nur mit

- Übergangsfunktion $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$

Im Beispiel: $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$

ϵ-NEA sind eine weitere Verallgemeinerung von NEA, bei denen von einigen Zuständen aus spontan, also ohne ein Symbol der Eingabe zu verbrauchen, in einen (oder mehrere) andere Zustände übergegangen werden kann.

In der Formalisierung stellt man dies dar, indem die Übergangsfunktion anstelle eines Symbols auch ϵ als zweites Argument erlaubt. $\delta(q, \epsilon) = \{q_1, \ldots, q_k\}$ bedeutet dann, dass der Automat vom Zustand q spontan in einen der Zustände $q_1, \ldots, q_k$ wechseln kann.

Jeder NEA kann auch als ϵ-NEA aufgefasst werden, bei dem für jeden Zustand q gilt $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$, der also einfach keine ϵ-Übergänge erlaubt.

Im motivierenden Beispiel kann der Automat, der binäre floating-point Konstanten erkennt, vom Anfangszustand entweder ein Vorzeichen lesen, oder ohne eines zu lesen mit ϵ in den Folgezustand übergehen.

Hüllenbildung

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ϵ-NEA.

Für $P \subseteq Q$ ist die ϵ-Hülle(P) induktiv definiert durch:

- $P \subseteq \epsilon$-Hülle(P)
- Ist $p \in \epsilon$-Hülle(P) und $q \in \delta(p, \epsilon)$, dann ist $q \in \epsilon$-Hülle(P).

Die ϵ-Hülle einer Menge P von Zuständen ist die Menge der Zustände, die von P aus nur mit *epsilon*-Übergängen erreicht werden können.

Erweiterte Übergangsfunktion

Wie beim DEA wird die Übergangsfunktion δ auf Σ^* erweitert:

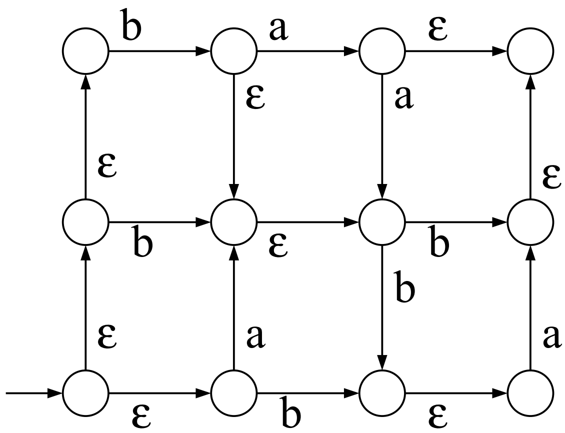
$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q, \epsilon) &= \epsilon\text{-Hülle}(\{q\}) \\
\hat{\delta}(q, wa) &= \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(\, q' \,, \, a \,) \Big)
\end{aligned}$$

Die Definition der erweiterten Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ ist analog zu der beim NEA. Es muss nur berücksichtigt werden, dass zwischen den Übergängen, bei denen Symbole gelesen werden, noch jeweils beiebig viele ϵ-Übergänge stattfinden können.

Daher wird am Anfang bei der Definition von $\hat{\delta}(q, \epsilon)$ und beim Schritt in der induktiven Definition noch die ϵ-Hülle gebildet.

Beispiel



Berechne $\hat{\delta}(\, q_0 \,,\, ab \,)$:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_0\}\big) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, a) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_4\}\big) = \{q_4, q_7\}$$
$$\hat{\delta}(q_0, ab) = \epsilon\text{-Hülle}\big(\{q_6, q_{10}\}\big) = \{q_6, q_9, q_{10}, q_{11}\}$$

Im Beispiel sind die Zustände von links unten nach rechts oben zeilenweise durchnummeriert.

Teilmengenkonstruktion

Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA.

Definiere daraus einen DEA A_D mit

- Zuständen $Q_D = 2^{Q_E}$.
- für $S \in Q_D$, also $S \subseteq Q_E$, und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(S, a) = \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q \in S} \delta_E(q, a)\Big)$$

- Anfangszustand ist $q_D := \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\})$
- Endzustände in F_D sind Mengen S mit

$$S \cap F_E \neq \emptyset$$

Die Teilmengenkonstruktion ist vollkommen analog zu der für NEA. Damit der DEA A_D die Abläufe des ϵ-NEA simulieren kann, die ja nach der obigen Definition ϵ-Übergänge enthalten können, muss beim Anfangszustand und bei den Übergängen von A_D jeweils die ϵ-Hülle gebildet werden.

Beweis der Äquivalenz

Theorem

Sei $A_E = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein ϵ-NEA,

und $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ der mit der Teilmengenkonstruktion gewonnene DEA.

Dann ist $L(A_D) = L(A_E)$.

Lemma

Seien A_E und A_D wie oben. Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\hat{\delta}_D(\, q_D \,,\, w \,) = \hat{\delta}_E(\, q_0 \,,\, w \,)$$

Beweis des Theorems:

$$\begin{array}{llll} w \in L(A_E) & \text{gdw.} & \hat{\delta}_E(q_0, w) \cap F_E \neq \emptyset & \text{Akzeptanzbedingung von } A_E \\ & \text{gdw.} & \hat{\delta}_D(q_D, w) \cap F_E \neq \emptyset & \text{nach dem Lemma} \\ & \text{gdw.} & \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D & \text{Definition von } F_D \\ & \text{gdw.} & w \in L(A_D) & \text{Akzeptanzbedingung von } A_D \end{array}$$

Beweis des Lemmas durch Induktion nach $|w|$:
Induktionsanfang: für $w = \epsilon$ ist laut Definition der Funktionen $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}_D(\, q_D \,,\, \epsilon \,) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(\{q_0\}) = \hat{\delta}_E(\, q_0 \,,\, \epsilon \,)$$

Induktionsschritt: für $w = va$ gilt

$$\begin{array}{lcll} \hat{\delta}_D(\, q_D \,,\, va \,) & = & \delta_D(\, \hat{\delta}_D(q_D, v) \,,\, a \,) & \text{nach Definition von } \hat{\delta}_D \\ & = & \delta_D(\, \hat{\delta}_E(q_0, v) \,,\, a \,) & \text{nach Induktionshypothese} \\ & = & \epsilon\text{-Hülle}\Big(\bigcup_{q \in \hat{\delta}_E(q_0, v)} \delta_E(q, a) \Big) & \text{nach Definition von } \delta_D \\ & = & \hat{\delta}_E(\, q_0 \,,\, va \,) & \text{nach Definition von } \hat{\delta}_E \end{array}$$

Übersicht

Endliche Automaten

Äquivalenz der Automatenmodelle

Reguläre Ausdrücke
- Definition
- NEA aus regulärem Ausdruck
- Regulärer Ausdruck aus DEA
- Anwendung

Pumping Lemma

http://xkcd.com

Theorie für MI

Endliche Automaten
Äquivalenz der Automatenmodelle
Reguläre Ausdrücke
Definition
NEA aus regulärem Ausdruck
Regulärer Ausdruck aus DEA
Anwendung
Pumping Lemma

Operationen auf Sprachen

Für Sprachen $L, L' \subseteq \Sigma^*$ definiere:

$$L \cdot L' := \{ u \cdot v \; ; \; u \in L \text{ und } v \in L' \}$$

Die Kleenesche Hülle L^* einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert:

$$\begin{aligned} L^0 &:= \{\epsilon\} \\ L^{i+1} &:= L^i \cdot L \\ L^* &:= \bigcup_{i \geq 0} L^i \end{aligned}$$

L^* ist die Menge aller Wörter der Form $w = v_1 \ldots v_n$ mit $v_i \in L$ für alle i.

Die Konkatenation zweier Sprachen ist, ähnlich wie z.B. in der Analysis die Summe zweier Funktionen, *punktweise* definiert.

Die Kleenesche Hülle ist benannt nach Stephen Cole Kleene, einem Pionier der Mathematischen Logik und Theoretischen Informatik, der in den 50er Jahren die Entwicklung der Theorie von Automaten und formalen Sprachen entscheidend mitgeprägt hat.

Kleene'sche Hülle

Beispiel:

$$L = \{ 01 , 110 \}$$

$$L^* = \{ \epsilon , 01 , 110 , 0101 , 01110 , 11001 , 010101 , 110110 , 0101110 , 0111001 , 1100101 , 01010101 , \ldots \}$$

Eigenschaften:

- $(L^*)^* = L^*$
- $\emptyset^* = \{\epsilon\}$
- $\{\epsilon\}^* = \{\epsilon\}$
- L^* ist unendlich, außer in diesen 2 Fällen

Weiterhin gilt $L \subseteq L^*$ und die Monotonie-Eigenschaft: wenn $A \subseteq B$ ist, dann auch $A^* \subseteq B^*$. Zusammen mit der ersten Eigenschaft auf der Folie bedeutet dies, dass die Kleenesche Hülle ein Hülloperator im mathematischen Sinne ist.

Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke und ihre Sprachen sind induktiv definiert:

- Konstanten ϵ und $\emptyset$ sind reguläre Ausdrücke, mit $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ und $L(\emptyset) = \emptyset$
- Für $a \in \Sigma$ ist $\mathbf{a}$ ein regulärer Ausdruck, mit $L(\mathbf{a}) = \{a\}$
- Sind E, F reguläre Ausdrücke, dann auch $(E + F)$, mit $L(E + F) = L(E) \cup L(F)$
- Sind E, F reguläre Ausdrücke, dann auch $(E \cdot F)$, mit $L(E \cdot F) = L(E) \cdot L(F)$
- Ist E regulärer Ausdruck, dann auch E^*, mit $L(E^*) = L(E)^*$

Reguläre Ausdrücke sind Terme, die Sprachen, also Mengen von Wörtern beschreiben, ähnlich wie in der Mathematik beispielsweise Polynome Punktmengen wie Kurven oder Flächen beschreiben.

Abkürzende Schreibweisen

- Bei mehreren $+$ werden Klammern weggelassen:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) \text{ statt } ((\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c})$$

- Der $\cdot$ wird auch weggelassen:

$$rs \text{ statt } r \cdot s$$

- Auch bei $\cdot$ können Klammern weggelassen werden:

$$(\mathbf{abc}) \text{ statt } ((\mathbf{ab})\mathbf{c})$$

- Mit Vorrangregeln: $\ast$ vor $\cdot$ vor $+$
können Klammern eingespart werden:

$$\mathbf{01}+\mathbf{10}^* \text{ statt } ((\mathbf{01})+(\mathbf{1}(\mathbf{0}^*)))$$

Beispiele

- $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$
- $\big(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{aab}\big)^*$
- $(\mathbf{b}+\mathbf{c})^*\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^*\mathbf{a} + (\mathbf{a}+\mathbf{c})^*\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^*\mathbf{b}$
$+(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^*\mathbf{c}$

Ausdrucksstärke

Wir werden im Folgenden zeigen:

Theorem

Reguläre Ausdrücke beschreiben genau die Sprachen, die von DEA (oder NEA, ϵ-NEA) erkannt werden.

Dazu zeigen wir zwei Teile:

Lemma

Für jeden regulären Ausdruck R gibt es einen ϵ-NEA A_R mit $L(A_R) = L(R)$.

Lemma

Für jeden DEA A gibt es einen regulären Ausdruck R_A mit $L(R_A) = L(A)$.

Die Klasse der Sprachen, die durch reguläre Ausdrücke beschreibbar und durch endiche Automaten erkennbar sind, nennt man die *regulären Sprachen*.